

Prof. Dr. Alfred Toth

Arithmetik semiotischer Zahlenfelder

1. Nach Bense (1979, S. 53) ist das Zeichen eine triadisch-trichotomische gestufte und „verschachtelte“ Relation bzw. „Relation über Relation“:

ZR (M, O, I) =									
ZR (M, M=>O, M=>O=>I) =									
ZR (mon. Rel., dyad. Rel., triad. Rel.)									
ZR (.1. .2. .3.) =									
ZR	1.1	1.2	1.3,	1.1	1.2	1.3,	1.1	1.2	1.3
				2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
							3.1	3.2	3.3

Die der Zeichenrelation assoziierte Zahlenfolge sollte allerdings nicht mit der Folge A002260 (OEIS) verwechselt werden („counting again and again“), sie sieht also NICHT wie folgt aus

$a \rightarrow (a \rightarrow b)$

$a \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c)$

$a \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d)$

$a \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e),$

sondern wie folgt:

$a \rightarrow (a \rightarrow b)$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c))$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d)))$

$a \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow ((a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e))))).$

Setzt man nun

$M \rightarrow a$

$O \rightarrow b$

$I \rightarrow c$

$J \rightarrow d$

$K \rightarrow e$,

wobei (M, O, I) die drei fundamentalen Kategorien der Semiotik sind, die mit den ersten drei Peircezahlen (vgl. Toth 2010) korrespondieren und d und e weitere Interpretanten sind, die für die triadisch-trichotomische Semiotik nicht definiert sind (vgl. Toth 2014), dann bekommt man die folgende Hierarchie für Zeichenrelationen der Form R^n , wobei $n \rightarrow \infty$:

$$R^1 = M$$

$$R^2 = (M \rightarrow (M \rightarrow O))$$

$$R^3 = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

$$R^4 = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J))))$$

$$R^5 = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I) \rightarrow ((M \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I \rightarrow J \rightarrow K))))), \text{ usw.}$$

Die dazu gehörenden Folgen und Teilfolgen der entsprechenden Peircezahlen sind:

$$R^1 = 1$$

$$R^2 = (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))$$

$$R^3 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$$

$$R^4 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4))))$$

$$R^5 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5))))),$$

usw.

2. Die relationale Darstellung verschachtelter Relationen setzt, wie in Toth (2020) ausgeführt, die Darstellung in einem 2-dimensionalen Zahlenfeld voraus. Für eine Zeichenrelation Z gilt

$$Z = f(\omega, \sigma),$$

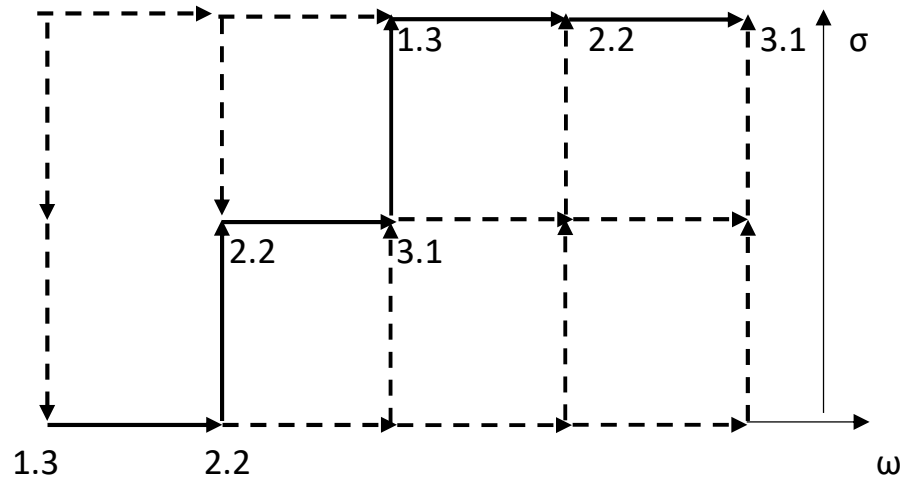
wobei ω der (horizontale) Ort und σ die (vertikale) Einbettungsstufe sind. Zur Darstellung von Z^3 gehen wir aus von

$$Z^3 = (3.x, 2.y, 1.z) \text{ mit } x, y, z \in (1, 2, 3)$$

und bekommen durch relationale Umformung

$$Z^3 = (1.z \rightarrow ((2.y \rightarrow 3.x) \rightarrow (1.z \rightarrow 2.y \rightarrow 3.x)))$$

Für $x = 1, y = 2, z = 3$ erhält man dann



Für jedes Subzeichen der Form $S = f(\omega, \sigma)$ gilt also

$$S_i(\omega_i, \sigma_i) \neq S_j(\omega_j, \sigma_j),$$

d.h. es gibt keine gleichen Subzeichen am gleichen Ort und auf der gleichen Stufe. Subzeichen sind also paarweise erstens durch sich selbst (z.B. $(1.1) \neq (1.2)$), zweitens durch ihren Ort (z.B. $(1.1)\omega_i \neq (1.1)\omega_j$) und drittens durch ihre Stufe (z.B. $(1.1)\sigma_i \neq (1.1)\sigma_j$) unterschieden. Für die im obigen Zahlenfeld analysierte dualidentische Zeichenklasse $\times(3.1, 2.2, 1.3) = (3.1, 2.2, 1.3)$ gilt also

$$(1.3)_{1,1} \neq (1.3)_{3,3}$$

$$(2.2)_{2,1} \neq (2.2)_{2,2} \neq (2.2)_{6,3}$$

$$(3.1)_{2,2} \neq (3.1)_{5,3}$$

Wie man leicht sieht, gilt ferner

$$n(R) = \sigma,$$

d.h. die relationale Stelligkeit ist gleich der Zahl der Einbettungsstufen einer Relation. (Einfacher Beweis unter Benutzung von Bense 1979, S. 53 u. 64.)

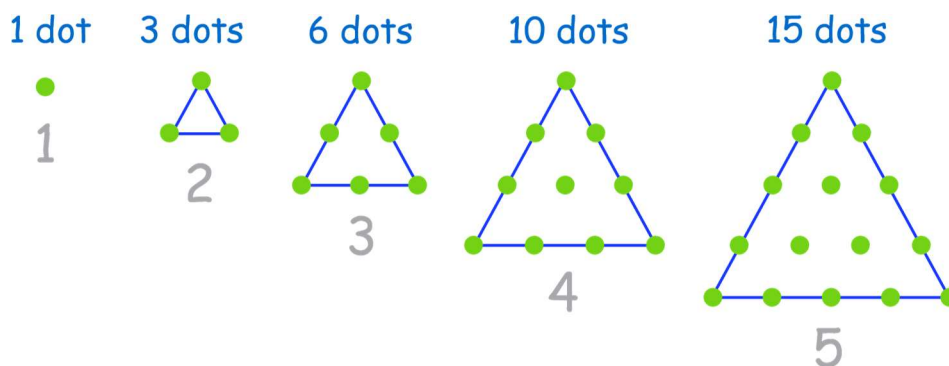
Läßt sich aber auch der Ort ω berechnen? Vergleichen wir die Anzahl von ω relativ zu den Einbettungsstufen:

R^n	ω
$R^1 = 1$	1
$R^2 = (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))$	3
$R^3 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$	6
$R^4 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4))))$	10
$R^5 = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3) \rightarrow ((1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5)))))$	15

Wie man sogleich sieht, gehören die Werte für ω zu den Dreieckszahlen (OEIS Folge A000217):

0, **1**, **3**, **6**, **10**, **15**, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275, 1326, 1378, 1431

die bekanntlich durch Einsetzung in $\frac{1}{2} (n (n + 1))$ berechnet werden und darin der Wert 0 für R^1 steht, also die leere semiotische Kategorie, die von Bense (1975, S. 64 f.) für das vom Zeichen bezeichnete Objekt bestimmt wurde. Während also der Einbettungsgrad eines Zeichens (σ) durch die Stelligkeit, d.h. den Wert n von R^n bestimmt ist, folgt die Anzahl ontischer Orte (ω), den die involvierten Kategorien bzw. ihre zugehörigen Peircezahlen einnehmen, der Folge der Dreieckszahlen. Projiziert man die Werte von ω auf das Dreiecksmodell zurück, erhält man



die sich damit mühelos im semiotischen Grundmodell, dem Dreiecksmodell für R^3 , eintragen lassen.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Calculus semioticus. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Toth, Alfred, Zu einer mehrwertigen semiotischen Automatentheorie. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2014

Toth, Alfred, Das semiotische Zahlenfeld. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2020

26.1.2020